

А. И. Короткий, И. А. Цепелев,
А. Т. Исмаил-заде, Б. М. Наймарк

ТРЕХМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА*

1. Введение

В работе рассматривается обратная задача гравитационной неустойчивости (неустойчивости Рэлея–Тейлора) неоднородной вязкой несжимаемой среды. Под обратной задачей гравитационной неустойчивости какой-либо среды понимается восстановление истории ее движения, возникшего в результате развития возмущений в этой среде под воздействием гравитационных сил. Другими словами, это задача о восстановлении состояния среды в прошлом по ее состоянию в настоящем. Математически она формулируется следующим образом: найти решение системы уравнений (уравнения Стокса, уравнения несжимаемости, уравнений переноса плотности и вязкости) с соответствующими граничными и начальными условиями в обратном направлении времени.

Динамика неоднородных структур (например, солевых комплексов) привлекает пристальное внимание геологов и геофизиков, в особенности специалистов по деформациям осадочных пород, горных инженеров, разведчиков недр и инженеров по подземным сооружениям. Это связано с тем, что подобные структуры могут приводить к обвалам, создавать ловушки для углеводородов, являться хранилищами радиоактивных отходов. Исследование, к примеру, соляных куполов важно для народного хозяйства. Практически все нефтегазовые резервы Прикаспийского солеродного бассейна связаны с соляными структурами. Чтобы понять историю осадконакопления, эрозии и деформации в осадочных бассейнах, необходимо реконструировать эволюцию бассейна в обратном времени. Метод палеорекострукции бассейна (см., например, [1]), часто использующийся для этих целей, является надежным средством для восстановления истории развития. Однако он неприменим для реконструкции солеродных бассейнов, где соль значительно деформировала вышележащие породы. В работах [2–4] представлен численный подход

*Работа поддержана РФФИ (№00-01-00222, 01-01-00566) и Международным научно-техническим центром (№99-1293).

© А. И. Короткий, И. А. Цепелев, А. Т. Исмаил-заде, Б. М. Наймарк, 2002

к обратной задаче Рэлея–Тейлора в случае двух пространственных переменных, восстановлена история развития типичных диапировых структур и численно реконструирован геолого-геофизический профиль вдоль восточной части Прикаспийского бассейна. В данной работе предложен один из возможных подходов к решению задачи реконструкции, основанный на компьютерном моделировании упомянутой выше обратной задачи в случае трех пространственных переменных.

В работе описан численный алгоритм, позволяющий решать некоторый класс задач гравитационной неустойчивости в обратном направлении времени и реконструировать историю развития неоднородных сред, в частности, восстанавливать эволюцию солеродных бассейнов. Подход к решению задачи основан на следующей идее [2]. В неоднородной структуре малые возмущения границ слоев или плотностей приводят к ее деформациям, а в случае инверсии плотностей такие возмущения растут, образуя диапировые структуры. При отсутствии диссипации энергии не важно, в каком направлении решается задача — в сторону увеличения или уменьшения времени. С математической точки зрения задача как в прямом, так и в обратном направлении времени должна быть одинаково устойчивой и корректной. Поэтому, располагая в настоящем диапировой структурой и решая соответствующую задачу в обратном времени, получим эволюцию этой диапировой структуры в прошлом. В работе [5] доказана корректность соответствующей математической модели в двумерном случае. В трехмерном случае, как отмечено в работах [6–9], аналогичный факт также имеет место.

При численном решении рассматриваемой задачи используется алгоритм, основанный на галеркинских приближениях и методе конечных элементов (с интерполяцией неизвестных трикубическими сплайнами), примененных к уравнениям движения среды. Некоторые результаты по решению и моделированию прямых задач представлены в [6–10]. Численное решение подобных задач довольно трудоемко из-за большой размерности соответствующих дискретных аппроксимаций. Некоторых продвижений здесь удалось достигнуть благодаря использованию специальных базисных элементов в методе конечных элементов и благодаря специальному представлению векторного потенциала скорости движения среды. Все это позволило получить приемлемые качественные и количественные результаты при сравнительно небольших размерностях дискретных задач.

При моделировании были приняты следующие упрощения: движения высоковязкой ньютоновской жидкости считались медленными; тепловые эффекты не учитывались; латеральные силы (связанные с растяжением или сжатием среды) не принимались во внимание. В расчетных примерах модель неоднородной среды представлена параллелепипедом, заполненным вязкой

жидкостью и разделенным на слои границами, на которых происходит скачкообразное изменение параметров среды (плотности и вязкости).

Расчеты показали, что предложенный алгоритм может быть применен для численной реконструкции диапировых структур. В конце работы приведены результаты решения одной модельной задачи.

2. Описание модели и постановка задачи

В области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \times (0, l_3) \subset R^3$ рассматривается медленное движение высоковязкой неоднородной несжимаемой жидкости (среды) в поле силы тяжести. Это движение в декартовых координатах описывается квазистационарным уравнением Стокса [11–14]

$$\nabla p = \operatorname{div}(\mu e_{ij}) + \vec{F}, \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

где p — давление; μ — вязкость; $e_{ij} = \partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i$ — тензор скоростей деформаций; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости жидкости в соответствующей точке x области Ω и в соответствующий момент времени t ; $\vec{F} = (0, 0, -g\rho)$ — вектор внешних массовых сил; g — ускорение свободного падения; ρ — плотность.

Уравнение несжимаемости задается в форме

$$\operatorname{div} \vec{u} = \partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2 + \partial u_3 / \partial x_3 = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

перенос плотности и вязкости описывается уравнениями

$$\partial \rho / \partial t + \sum_{i=1}^3 u_i \partial \rho / \partial x_i = 0, \quad \rho(t_0, x) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$\partial \mu / \partial t + \sum_{i=1}^3 u_i \partial \mu / \partial x_i = 0, \quad \mu(t_0, x) = \mu_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.4)$$

На границе Γ области Ω задается граничное условие прилипания

$$\vec{u} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.5)$$

или граничное условие непротекания с идеальным скольжением

$$\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0, \quad \partial \vec{u}_\tau / \partial \vec{n} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (2.6)$$

где \vec{n} — единичный вектор внешней нормали в точках $x \in \Gamma$; \vec{u}_τ — проекция вектора скорости \vec{u} на касательную плоскость к Γ в точках $x \in \Gamma$.

Прямая задача состоит в расчете функций

$$\vec{u} = \vec{u}(t, x), \quad p = p(t, x), \quad \rho = \rho(t, x), \quad \mu = \mu(t, x), \quad (2.7)$$

удовлетворяющих уравнениям (2.1)–(2.4) при $t \geq t_0$, граничным условиям (2.5) или (2.6) при $t \geq t_0$, начальным условиям из (2.3) и (2.4).

Обратная задача состоит в расчете функций (2.7), удовлетворяющих уравнениям (2.1)–(2.4) при $t \leq t_0$, граничным условиям (2.5) или (2.6) при $t \leq t_0$, начальным условиям из (2.3) и (2.4).

Решение обратной задачи при желании можно свести к решению прямой задачи при $\tau \geq 0$ с помощью замены времени $\tau = t_0 - t$ (τ – новое время). После замены переменной времени новые искомые функции (давление и скорость берутся с обратными знаками) будут удовлетворять исходной «прямой» краевой задаче, но с вектором внешних массовых сил $\vec{F} = (0, 0, g\rho)$, что с физической точки зрения соответствует инверсии силы тяжести.

3. Схема расчета задачи

Следуя схеме, изложенной в работах [6–10], исключим из рассмотрения давление p и условие несжимаемости (2.2), введя векторный потенциал $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, 0)$ скорости по формуле $\vec{u} = \text{rot } \vec{\psi}$,

$$u_1 = -\partial\psi_2/\partial x_3, \quad u_2 = \partial\psi_1/\partial x_3, \quad u_3 = \partial\psi_2/\partial x_1 - \partial\psi_1/\partial x_2. \quad (3.1)$$

Выполним операцию rot над равенством (2.1). Тогда, учитывая равенства $\text{rot } (\nabla p) = 0$ и $\text{div } (\text{rot } \vec{\psi}) = 0$, получим систему уравнений для нахождения функций $\psi_1, \psi_2, \rho, \mu$:

$$\text{rot } \text{div } (\mu e_{ij}) + \text{rot } \vec{F} = 0, \quad (3.2)$$

$$\partial\rho/\partial t + \langle \nabla\rho, \text{rot } \vec{\psi} \rangle = 0, \quad \partial\mu/\partial t + \langle \nabla\mu, \text{rot } \vec{\psi} \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Согласно методу, изложенному в [6–10], представим аппроксимацию векторного потенциала скорости в виде линейной комбинации подходящих базисных трикубических сплайнов и найдем эту аппроксимацию из (3.2) методом конечных элементов. Тогда уравнение (3.2) перейдет в соответствующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения функций ψ_1 и ψ_2 по базисной системе функций. Матрица алгебраической системы будет симметричной и положительно определенной. Для решения этой системы можно применять прямые методы (например, метод квадратного корня) или итерационные методы (например, методы Зейделя или Шварца). Преимуществом прямых методов является то,

что за конечное число шагов они дают решение с машинной точностью, их недостаток — быстрое увеличение времени расчетов с ростом размерности алгебраической системы. Конкретные реализации этих методов, специально адаптированных для рассматриваемой задачи, приведены в [6–10].

Аппроксимации плотности и вязкости представим в виде линейных комбинаций подходящих базисных трилинейных сплайнов, которые позволяют достаточно хорошо аппроксимировать разрывные характеристики среды. Благодаря применению трикубических сплайнов для аппроксимации векторного потенциала, разбиение области для аппроксимации плотности и вязкости можно выбирать значительно мельче, чем разбиение для аппроксимации векторного потенциала. При такой аппроксимации уравнения (3.3) перейдут в соответствующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения коэффициентов в аппроксимациях. При таком приближении требуется большая точность решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Представляется, что в данном случае эффективнее решать уравнения (3.3) методом характеристик [6–9]. Он позволяет уменьшить численную диссипацию и находить искомые функции плотности и вязкости с приемлемой точностью на больших отрезках времени. Однако по мере увеличения отрезка времени эффективность таких расчетов уменьшается. Для интегрирования уравнений (3.3) часто применяется также разностная схема TVD/AC [15], которая имеет точность $O(h_x^2)$ (h_x — диаметр разбиения области Ω) и позволяет уменьшить численную диссипацию. Эта схема фактически вместо уравнений (3.3) аппроксимирует редуцированные уравнения

$$\partial \rho / \partial t + \langle \nabla(\rho + L(\rho)), \text{rot } \vec{\psi} \rangle = 0, \quad \partial \mu / \partial t + \langle \nabla(\mu + L(\mu)), \text{rot } \vec{\psi} \rangle = 0,$$

где $L(\cdot)$ — антидиффузионный член, с помощью которого можно компенсировать диссипацию.

Опишем теперь кратко последовательность расчетов. Начальные значения μ_0 и ρ_0 вязкости и плотности подставляются в краевую задачу (3.2) с соответствующими граничными условиями для расчета векторного потенциала $\vec{\psi}$ и поля скоростей \vec{u} в момент времени $t = t_0$. Затем эти поля используются в задачах (3.3) для расчета вязкости μ и плотности ρ в области Ω в момент времени $t = t_0 + \Delta t$. Далее, момент времени $t = t_0 + \Delta t$ принимается за начальный и схема расчетов повторяется. Базис из трикубических сплайнов позволяет существенно понизить размерность аппроксимаций для нахождения векторного потенциала. Вязкость и плотность вычисляются так, как указано выше (методом характеристик или сеточным методом с помощью TVD/AC-схемы). Для повышения эффективности расчетов эти два метода можно комбинировать, несколько временных шагов рассчитывать разностной схемой, затем вычислять характеристики и корректировать значения

плотности и вязкости. Шаг по времени Δt может выбираться автоматически так, чтобы максимальное смещение материальных точек среды не превосходило заданной достаточно малой величины h . Для этого отыскивается $u_{\max} = [u_1^2 + u_2^2 + u_3^2]^{1/2}$ по узлам сетки, а затем полагается $\Delta t = h/u_{\max}$.

4. Результаты расчета модельного примера

В качестве модельного примера рассмотрим движение неоднородной вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в области

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 0,75].$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ жидкость состояла из двух слоев — легкого и менее вязкого внизу (в области $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$) и тяжелого и более вязкого сверху (в области Ω_1),

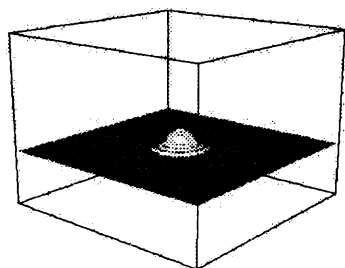
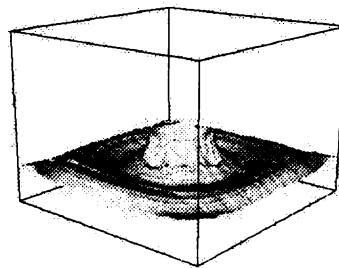
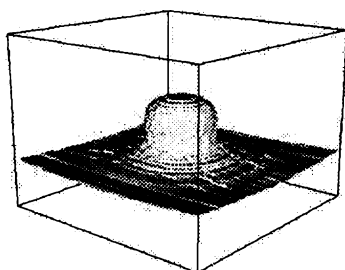
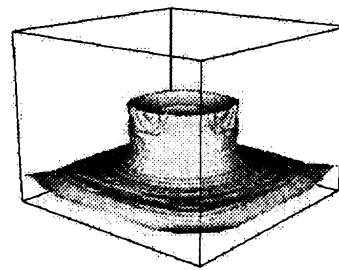
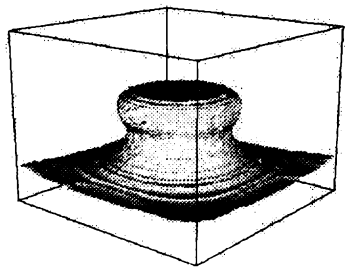
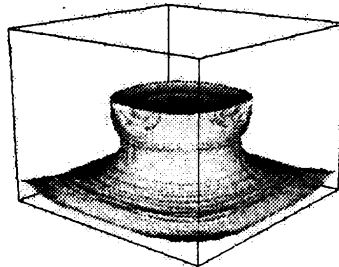
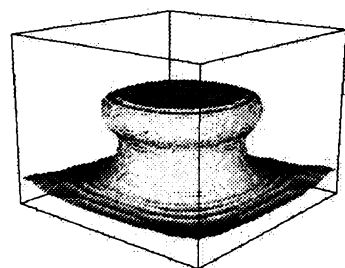
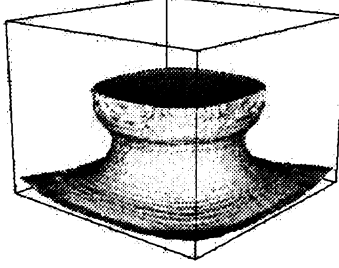
$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : x_3 > 0,25 + 0,09 \cdot \exp[-180 \cdot [(x_1 - l_1/2)^2 + (x_2 - l_2/2)^2]]\}.$$

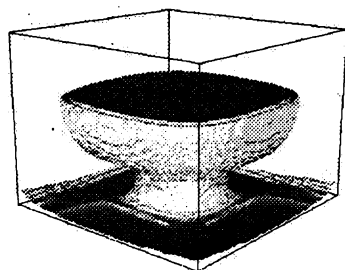
В начальный момент времени считалось, что $\rho_0(x) = 1$ для $x \in \Omega_1$ и $\rho_0(x) = 0,85$ для $x \in \Omega_2$, $\mu_0(x) = 100$ для $x \in \Omega_1$ и $\mu_0(x) = 1,0$ для $x \in \Omega_2$.

В центральной части поверхности, которая разделяет слои Ω_1 и Ω_2 , в начальный момент времени появляется небольшая выпуклость (возмущение поверхности раздела двух сред). Это возмущение является начальной фазой зарождающегося диапира, который развивается во времени вследствие внутренней гравитационной неустойчивости этой двухслойной системы.

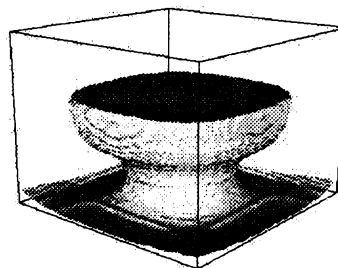
Для расчета задачи выбиралась сетка $32 \times 32 \times 32$ при аппроксимации векторного потенциала скорости и сетка $96 \times 96 \times 96$ при аппроксимации плотности и вязкости. Соответствующая система линейных алгебраических уравнений решалась параллельным методом Гаусса–Зейделя. Время счета на десяти процессорах одной итерации по времени составляло 2 минуты на компьютере параллельного действия МВС-1000 с распределенной памятью (расчет векторного потенциала, поля скоростей, пересчет плотности и вязкости).

В левом столбце рисунка показана эволюция в прямом времени двухслойной жидкости (эволюция развития диапира в прямом времени). Изображенная поверхность представляет собой границу раздела между нижней легкой и верхней тяжелой жидкостью. В правом столбце рисунка показана обратная эволюция диапира (восстановление истории развития диапира). Финальное состояние модели в прямой задаче принималось за начальное состояние в обратной задаче.

 $t = 0$  $t = 0$  $t = 50$  $t = 50$  $t = 110$  $t = 110$  $t = 170$  $t = 170$



$t = 210$



$t = 210$

Литература

1. ISMAIL-ZADEN A. T., KOSTYUCHENKO S. L., NAIMARK B. M. The Timan-Pechora Basin (northeastern European Russia): tectonic subsidence analysis and a model of formation mechanism // *Tectonophysics*. 1997. Vol. 283. P. 205–218.
2. НАЙМАРК Б. М. Обратная задача гравитационной неустойчивости // Докл. РАН. 1999. Т. 364, №4. С. 1–3.
3. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., НАЙМАРК Б. М., ТЭЛВОТ К. Реконструкция истории движения среды: обратная задача гравитационной устойчивости // *Вычислительная сейсмология*. 2000. Вып. 31. С. 52–61.
4. ISMAIL-ZADEN A. T., TALBOT C. J., VOLOZH YU. A. Dynamic restoration of profiles across diapiric salt structures: numerical approach and its applications // *Tectonophysics*. 2001. Vol. 337, №1-2. P. 23–38.
5. НАЙМАРК Б. М. Существование и единственность решения задачи Рэлея-Тейлора // *Вычислительная сейсмология*. 1986. Вып. 18. С. 35–45.
6. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Реализация трехмерной гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // *ЖВМиМФ*. 1998. Т. 38. №7. С. 1190–1203.
7. НАЙМАРК Б. М., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И. и др. Численная реализация гидродинамической модели эволюции осадочных бассейнов // *Тр. ИММ УрО РАН*. 1998. Т. 5. С. 143–173.
8. НАЙМАРК Б. М., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И. и др. Моделирование трехмерных вязких течений в верхних слоях мантии // *Вычислительная сейсмология*. 1998. Вып. 30. С. 3–15.
9. КОРОТКИЙ А. И., ЦЕПЕЛЕВ И. А., ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т. и др. Параллельные алгоритмы моделирования движения неоднородной вязкой жидкости // *Изв. Урал. гос. ун-та*. 1999. №14. (Математика и механика. Вып. 2). С. 65–76.
10. ИСМАИЛ-ЗАДЕ А. Т., КОРОТКИЙ А. И., НАЙМАРК Б. М. и др. Численное моделирование трехмерных вязких течений под воздействием гравитационных и тепловых эффектов // *ЖВМиМФ*. 2001. Т. 41. №9. С. 1399–1415.

11. CHANDRASEKHAR S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961.
12. ЛАНДАУ Л. Д., ЛИФШИЦ Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
13. ЛАДЫЖЕНСКАЯ О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
14. АНТОНЦЕВ С. Н., КАЖИХОВ А. В., МОНАХОВ В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
15. LI X. L., JIN B. X., GLIMM J. Numerical study for the three-dimensional Rayleigh–Taylor instability through the TVD/AC scheme and parallel computation // J. Comput. Phys. 1996. Vol. 126. P. 343–355.

Статья поступила 14.06.2001 г.